

Chaos in het dierenrijk

Arno Swart

swart@math.uu.nl



Universiteit Utrecht

Introductie

We ontwerpen een simpel model voor de groei van een populatie herten door de jaren heen.

- Modelleren
- Analyseren
- Conclusies
- Voorbeelden



Aannames

Neem aan

- Het aantal herten, in duizenden, in jaar i is gegeven door N_i .
- We beginnen in jaar nul, met N_0 herten.



Groei van de populatie

Als het aantal herten niet zou veranderen zouden we schrijven

$$N_{i+1} = N_i.$$

Laten we aannemen dat er ieder jaar a keer zoveel herten zijn, dan

$$N_{i+1} = aN_i.$$

(Let op: we moeten nu wel *afronden!*)



Een rem op de groei

Door competitie (bv. voedsel) sterven er ook herten,

$$N_{i+1} = aN_i - bN_i.$$

Het voedseltekort b is evenredig aan het aantal herten,

$$b = cN_i.$$

Dus

$$N_{i+1} = aN_i - bcN_i^2.$$



Vereenvoudigen

$$\begin{aligned}N_{i+1} &= aN_i - bcN_i^2 \\ &= aN_i\left(1 - \frac{bc}{a}N_i\right),\end{aligned}$$

zet nu $x_i = bcN_i/(1000 * a)$ dan

$$x_{i+1} = ax_i(1 - x_i)$$



Logistische Groei

Pierre Verhulst (1838):

$$x_{i+1} = ax_i(1 - x_i), a > 0.$$

Wat gebeurt er voor verschillende waarden van

- a , de 'groeifactor'
- x_0 de beginpopulatie

Experimenten met Matlab



Universiteit Utrecht

Evenwicht

Blijkbaar $x_i = x_{i+1} = x_{i+2} = \dots$ We proberen

$$x = ax(1 - x)$$

$$1 = a(1 - x) \quad \text{of} \quad x = 0$$

$$\frac{1}{a} = 1 - x \quad \text{of} \quad x = 0$$

$$x = \frac{a - 1}{a} \quad \text{of} \quad x = 0.$$

Deze x heten *evenwichtspunt*. Stabiel of instabiel ?



Tweebanen

De populatie springt heen en weer tussen twee evenwichten, dus $x_i = x_{i+2}$ voor ieder jaar i .
Oftewel met

$$f(x) = ax(1 - x),$$

dan is 1 stap

$$x_{i+1} = f(x_i)$$

en de volgende stap

$$x_i = f(x_{i-1})$$



Tweebanen (2)

We vervolgen

$$x_{i+1} = f(x_i) = f(f(x_{i-1})).$$

Dan is een 2-baan:

$$x = f(f(x)).$$

Na wat rekenen

$$x = a[ax(1 - x)](1 - [ax(1 - x)]) \quad (1)$$



Oplossing tweebaan

Lastig! Factoriseren:

$$x\left(\frac{a-1}{a} - x\right)(1+a-ax(1+a-ax)) = 0$$

- $x = 0$ of $x = \frac{a-1}{a}$
- $\frac{1+a \pm \sqrt{-3-2a+a^2}}{2a}$

Oplossingen van $f(x) = x$ (waarom ?) plus twee nieuwe. Experimenten met Matlab



Universiteit Utrecht

Chaos

Het model vertoont *chaos*.

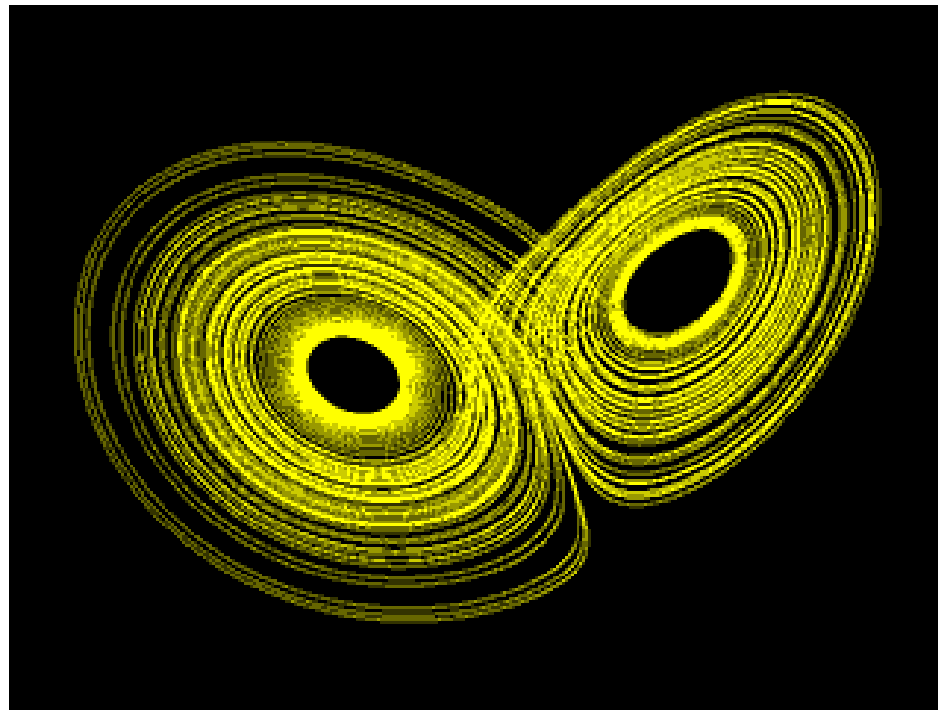
Klein verschil in beginvoorwaarden geeft extreem verschil in uitkomst.

Komt voor in diverse disciplines (meteorologie, biologie, ...). Leidde ook tot 'ontdekking' van *fractals*.



De Lorenz Attractor

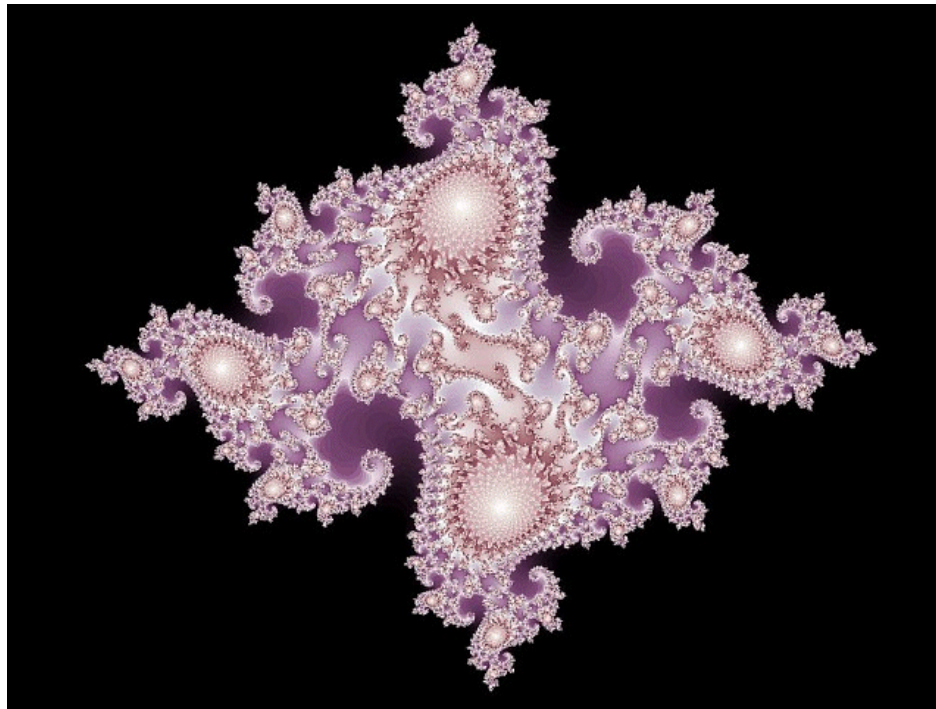
Beschrijft convectie in de atmosfeer.



Universiteit Utrecht

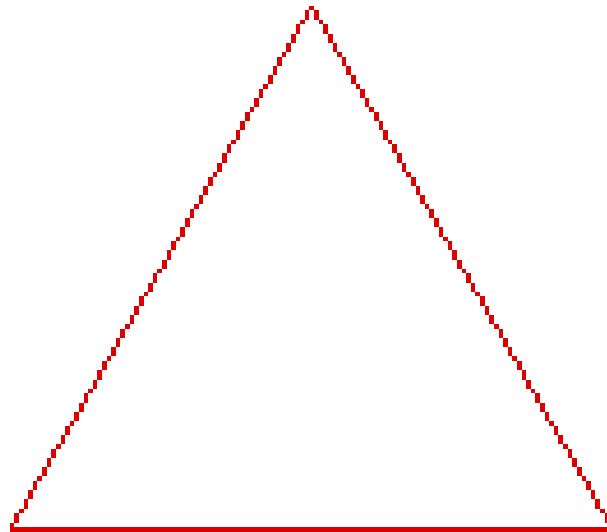
De Julia Fractal

Itereer $f(z) = z^2 + c$, met z een *complex getal*.



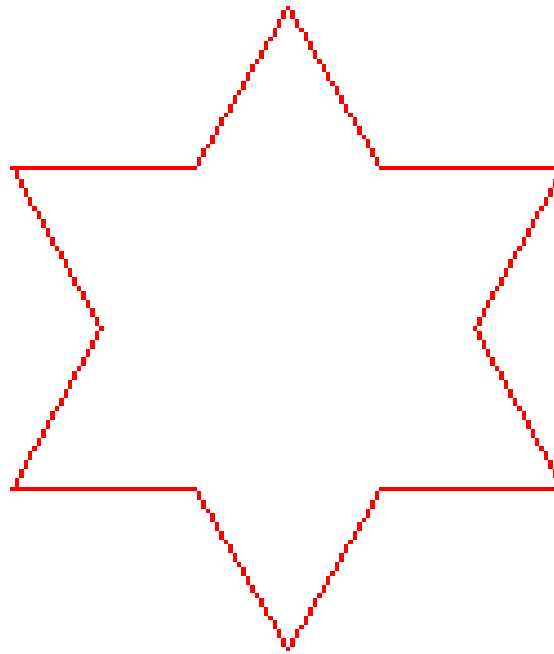
Universiteit Utrecht

Koch's sneeuwvlok



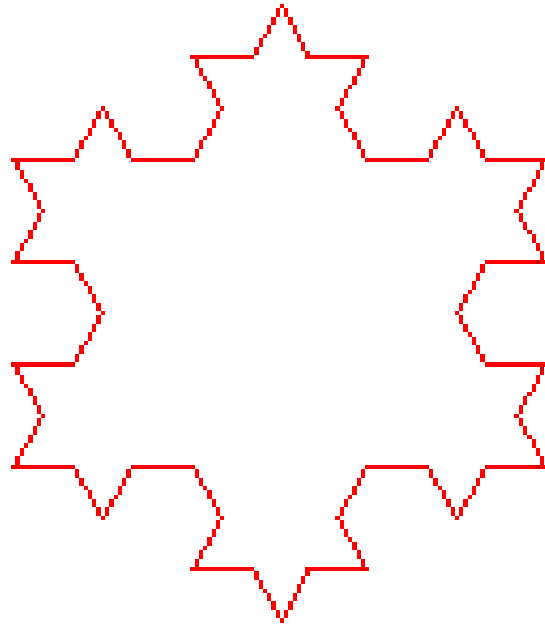
Universiteit Utrecht

Koch's sneeuwvlok



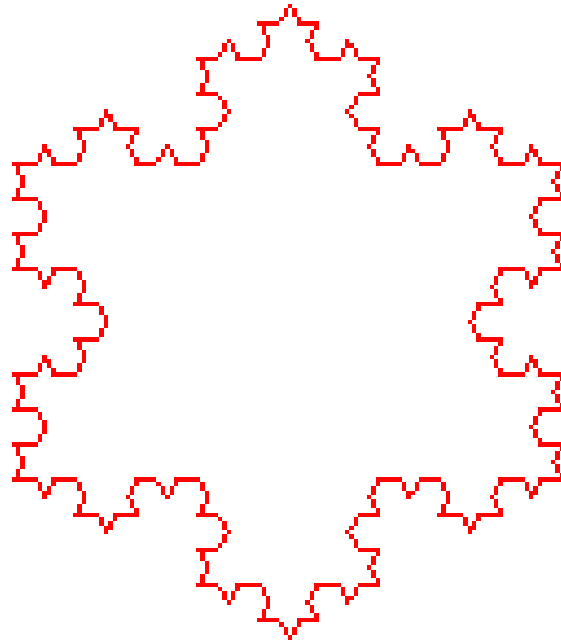
Universiteit Utrecht

Koch's sneeuwvlok



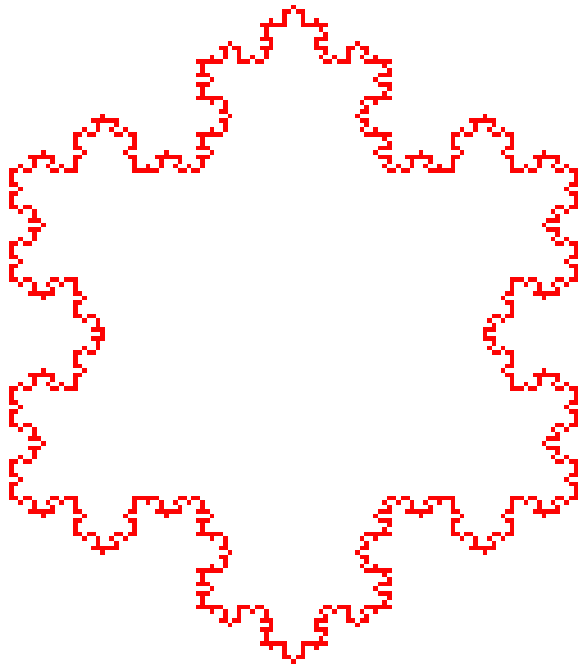
Universiteit Utrecht

Koch's sneeuwvlok



Universiteit Utrecht

Koch's sneeuwvlok



Nuttig voor onderzoek naar
kristalgroei.



Universiteit Utrecht

Conclusies

- Ons herten model illustreert *chaos*.
- Komt voor in veel vakgebieden.
- Voorbeelden van toegepaste wiskunde.

<http://www.math.uu.nl/people/swart>



Universiteit Utrecht